RACINES CARREES

I. Définition

Définition1 : Si a est un nombre positif, la racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, désigne le seul nombre positif dont le carré est égal à a.
Ainsi, par définition, on a donc $(\sqrt{a})^2 = a$

Exemple : $\sqrt{0} = 0; \sqrt{1} = 1; \sqrt{9} = 3; \sqrt{16} = 4; \sqrt{25} = 5;...$

- Remarques : Parmi les nombres connus en classe de troisième, aucun n'a pour carré un nombre négatif. Ainsi écrire « racine carrée de -9 » n'a pas de sens, en effet l'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est négatif

II. Opérations et racines carrées

Activité1 : Opérations et racines carrées

a. Produit

Propriété1 : Pour tous les nombres a et b positifs, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
C'est-à-dire, le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit.

Exemple : $A = \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

b. Racine carrée d'un carré

Propriété2 : Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a^2} = a$

Preuve : $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

Exemples : $B = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $C = \sqrt{1,44} = \sqrt{1,2^2} = 1,2$

c. Quotient

Propriété3 : Pour tous les nombres a et b positifs, avec b non nul, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
C'est-à-dire, le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient.

Exemple : $D = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{21}{27}} = \sqrt{\frac{3 \times 7}{3 \times 9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

d. Somme

ATTENTION : en général, si a et b sont des nombres positifs, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$
C'est-à-dire, la somme de deux racines carrées n'est, en général, pas égale à la racine carrée de la somme.

Exemple : $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ alors que $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ donc on constate que $\sqrt{16}+\sqrt{9}\neq\sqrt{16+9}$

e. Simplifications d'écritures

Tout comme on préfère écrire une fraction sous forme irréductible, on préfère écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers

Propriété : Pour tous les nombres a et b positifs, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

L'intérêt de modifier ainsi l'écriture des racines est surtout de mieux voir les éventuelles simplifications.

Exemple : $\sqrt{50}+6\sqrt{20}=\sqrt{25\times 2}+6\sqrt{2}=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}=11\sqrt{2}$

III. Résolution d'équation du type $x^2 = a$

Théorème1 : L'équation $x^2=a$ où x est l'inconnue possède 0,1 ou 2 solutions suivant le signe de a.

- Si $a<0$: pas de solutions
- Si $a=0$: 0 est l'unique solution de l'équation
- Si $a>0$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les deux uniques solutions de l'équation

Preuve : Si $a<0$: un carré ne peut être négatif, l'équation n'a donc pas de solutions.
Si $a=0$: $x^2=0$ si et seulement si $x=0$; l'équation a donc une unique solution 0
Si $a>0$: $x^2=a \Leftrightarrow x^2-a=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$ or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul alors cela équivaut à :

$$(x-\sqrt{a})=0 \text{ ou } (x+\sqrt{a})=0 \Leftrightarrow \ldots$$

Exemples : $x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$.
$x^2=-4$ n'a pas de solutions réelles.